Lösungen: Mathematik, Beispiel 1

1. a. $$\frac{\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}} = \frac{\frac{a^2-4b^2}{2ab}}{\frac{2b-a}{2ab}} = \frac{\frac{(a-2b)(a+2b)}{2ab}}{\frac{-(a-2b)}{2ab}} = -\frac{(a-2b)(a+2b)2ab}{(a-2b)2ab}$$
$$= -(a+2b)$$

   b. $$\sqrt{x^4+4x^2y^2+4y^4}-x^2 = \sqrt{(x^2+2y^2)^2}-x^2 = x^2+2y^2-x^2 = 2y^2$$

2. a. $$a=\frac{1}{6}: \left|\begin{array}{l} x+\frac{y}{6}=1 \\ 3x+y=1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 6x+y=6 \\ 3x+y=1 \end{array}\right| \Rightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$
$$\Rightarrow y = 1-3x = -4 \Rightarrow L = \left\{\left(\frac{5}{3},-4\right)\right\}$$

   b. $$\left|\begin{array}{l} x+ay=1 \\ 3x+y=1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3x+3ay=3 \\ 3x+y=1 \end{array}\right| \Rightarrow 3ay-y=2 \Rightarrow y=\frac{2}{3a-1}$$
$$\Rightarrow x = 1-ay = \frac{3a-1-2a}{3a-1} = \frac{a-1}{3a-1} \Rightarrow L = \left\{\left(\frac{a-1}{3a-1},\frac{2}{3a-1}\right)\right\}$$

   c. Für $a \neq \frac{1}{3}$ ist das Gleichungssystem lösbar.

3. a. $$\frac{x-1}{x-3} = \frac{4}{(x-1)(x-3)}, \quad D = R \setminus \{1,3\}$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow x=3 \text{ oder } x=-1. \text{ Da } 3 \notin D \text{ ist } L=\{-1\}.$$

   b. $$\underbrace{(x+2)}_{=0}\underbrace{\left(3+\frac{1}{2x-1}\right)}_{=0} = 0, \quad D = R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$
$$x=-2 \text{ oder } 3(2x-1)+1=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ oder } x=\frac{1}{3} \Rightarrow L=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$$

4. a. $T(x) \geq 0$, wenn entweder $x+5 \geq 0$ und $x-2>0$ (1. Fall) oder $x+5 \leq 0$ und $x-2<0$ (2. Fall). Im 1. Fall muss $x>2$ sein, im 2. Fall muss $x \leq -5$ sein. Also ist $L=\{\ldots,-8,-7,-6,-5,3,4,5,\ldots\}$.

   b. $$T(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}-2} = \frac{(\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = \frac{13+7\sqrt{3}}{3-4} = -(13+7\sqrt{3})$$

5. $\sqrt{7x+11} - 3 = x,\ D = \{ x \in R \mid x \geq -11/7 \}$

$\Rightarrow \sqrt{7x+11} = x + 3 \Rightarrow 7x + 11 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(x+1)}_{=0}\underbrace{(x-2)}_{=0} = 0 \Rightarrow L = \{-1, 2\}$

6. a. $\left[\dfrac{1}{(-a)^{-1}}\right]^{-1} = (-a)^{-1} = \dfrac{1}{-a} = -\dfrac{1}{a}$

b. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot 0.25^{-3} = 2^{-6} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3} = 2^{-6} \cdot (2^{-2})^{-3} = 2^{-6} \cdot 2^6 = 2^0 = 1$

7. *x* = Anzahl Sitzplätze in der Business-Klasse
y = Anzahl Sitzplätze in der Economy-Klasse

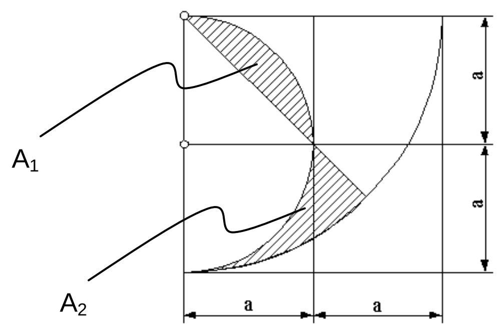
$$\left| \begin{array}{rcl} x + y &=& 400 \\ 2'000x + 1'000y &=& 500'000 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} x + y &=& 400 \\ 2x + y &=& 500 \end{array} \right| \Rightarrow x = 100 \text{ und } y = 300$$

8. a. $g:\ y = mx + b, \qquad m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{7-10}{4-10} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 7 = \dfrac{1}{2} \cdot 4 + b \Rightarrow b = 5 \Rightarrow g:\ y = \dfrac{1}{2}x + 5$

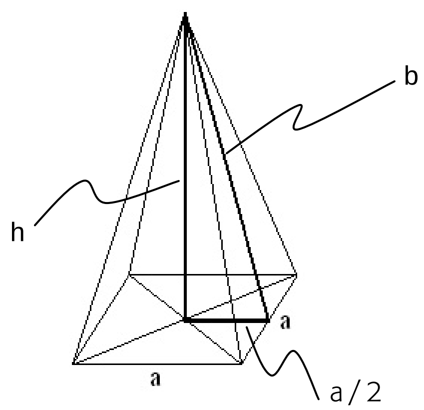
b. $h: y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{15}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{2}x_s + 5 = -\dfrac{3}{4}x_s + \dfrac{15}{4} \Rightarrow 2x_s + 20 = -3x_s + 15$

$\Rightarrow x_s = -1 \Rightarrow y_s = \dfrac{1}{2}x_s + 5 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow S(-1, 4.5)$

9. 

$A_1 = \dfrac{a^2\pi}{4} - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{\pi - 2}{4}a^2$

$A_2 = \dfrac{(2a)^2\pi}{8} - \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2\pi}{4}$
$= \dfrac{2\pi - 2 - \pi}{4}a^2 = \dfrac{\pi - 2}{4}a^2$

10. 

Ansatz:

I) Volumen $V = \dfrac{Gh}{3}$

II) Grundfläche $G = a^2$

III) Seitenfläche $A = 2G$

IV) $A = \dfrac{ab}{2}$

V) $h^2 = b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

$\overset{\text{(II), (III) \& (IV)}}{\Rightarrow} 2a^2 = \dfrac{ab}{2} \Rightarrow b = 4a \overset{\text{(V)}}{\Rightarrow} h = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}a \overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} V = \dfrac{\sqrt{7}}{2}a^3 \approx 1.323\, a^3$